

Sur la prédiction micromécanique du comportement auxétique des matériaux composites

W. AZOTI^{a,b}, Y. KOUTSAWA^a, N. BONFOH^b, S. BELOUETTAR^a, P. LIPINSKI^b

a. Centre de Recherche Public Henri Tudor, 29, Avenue John F. Kennedy, L-1855 Luxembourg, Luxembourg

b. Laboratoire de mécanique, Biomécanique, Polymère, Structures (LaBPS), ENIM, 1 route d'Ars Laquenexy CS65820, 57078 Metz Cedex, France.

Résumé :

L'étude, basée sur des approches micromécaniques, explore la possibilité de concevoir un comportement auxétique d'un matériau équivalent à partir des phases non auxétiques. Deux types de microstructures ont été analysées. Il s'agit de la microstructure multi-enrobée d'une part et la microstructure nid d'abeilles non-conventionnelle dite « re-entrant microstructure » d'autre part. La solution au problème hétérogène a été obtenue à partir de l'équation intégrale de Dederich-Zeller. Une approximation permettant de reproduire l'anisotropie du composite en fonction des textures topologique et morphologique des inclusions a été proposée. Les résultats numériques indiquent que l'effet auxétique ne peut résulter que d'inclusions interconnectées.

Abstract:

This work investigates the micromechanical possibility to design auxetic composites which consist of non-auxetic phases. Two specific microstructures have been considered: in one hand the three-layered hollow-cored fibers-reinforced composite and in other hand a microstructure imitating the re-entrant honeycomb microstructure. The solution of the heterogeneous problem is obtained here by the integral equation of Dederich-Zeller. This allows the construction of interaction tensor by taking into account the material's anisotropy as well as the morphological and the topological textures of the inhomogeneities. Numerical results show that the auxeticity can be achieved only for tied heterogeneities

Mots clefs : micromécanique, anisotropie, comportement auxétique.

1 Introduction

Le terme « auxétique » fait référence à un matériau ayant un coefficient de Poisson négatif (CPN). Contrairement aux matériaux conventionnels, les matériaux auxétiques se gonflent sous l'effet de la traction et se rétrécissent sous l'effet de la compression. L'intérêt du comportement auxétique réside dans l'amélioration de certaines propriétés mécaniques telles que la résistance à l'indentation, le module de cisaillement et d'autres propriétés viscoélastiques et acoustiques qui se voient augmenter avec le CPN (Voir Ref.[1]). Ces propriétés destinent, de ce fait, ces matériaux à des applications innovantes dans la biomécanique, l'aérospatiale, l'automobile, etc [1-4]. Aussi a-t-il été constaté que le comportement auxétique est intrinsèquement lié à la nano ou microstructure de ces matériaux [5, 6]. Dans ce travail, nous nous proposons d'explorer le comportement auxétique par les outils de la micromécanique à travers deux types de microstructures. D'une part la microstructure multi-enrobée étudiée dans le cas du schéma auto-cohérent généralisé [7-9], et d'autre part, la microstructure nid d'abeille non conventionnelle dite « re-entrant microstructure » étudiée avec le schéma de Mori-Tanaka [10]. Dans les deux cas, l'analyse micromécanique se base sur l'équation intégrale de Dederich-Zeller [11], ce qui permet la prise en compte de l'anisotropie du matériau d'un point de vue texture morphologique et topographique à travers le tenseur d'interaction. Les résultats issus de la microstructure multi-enrobée sont comparés avec ceux obtenus par Stagni [12] tandis que ceux de la microstructure dite « re-entrant » ont été validés par Eléments Finis.

2 Propriétés effectives et Equation intégrale de Green

La micromécanique décrit les relations entre les propriétés continues d'un matériau et sa microstructure. De ce fait, la transition d'échelle micro-macro se fait au travers d'un volume élémentaire représentatif (VER) tel que défini par Hill [13], Kröner [14, 15], et Willis [16]. Le VER étant supposé en équilibre et la déformation compatible, les conditions aux bords de ce dernier peuvent être formulées en termes de vecteur contrainte ou champs de déplacements macroscopiques uniformes. Aussi, est-il supposé, l'absence de forces volumiques et d'inertie et la continuité des vecteurs, traction et déplacement aux interfaces. L'étape de la localisation qui relie les grandeurs micro-macro par le biais du tenseur de localisation et de l'homogénéisation qui utilise la technique de la moyenne permettent de remonter aux propriétés macroscopiques données par [10]:

$$C^{eff} = c^0 + \sum_{I=1}^N \varphi_I (c^I - c^0) : A^I \quad (0.1)$$

Où c^I , A^I , φ_I sont respectivement, le tenseur des constantes élastiques, le tenseur de localisation en déformation et la fraction volumique de l'hétérogénéité I . La connaissance du tenseur de localisation A^I contenant toutes les informations sur la microstructure et demeurant l'inconnue du problème repose sur le formalisme de Dederich-Zeller connue sous le nom d'équation intégrale de Green. La décomposition du tenseur des constantes élastiques $c(r)$ en une partie de référence C^r et une partie fluctuante $\delta c(r)$ et sa substitution dans la condition d'équilibre à travers la loi de comportement local, conduit à une équation de Navier de la forme:

$$C_{ijkl}^r u_{k,lj} + \left(\delta c_{ijkl}(r) u_{k,l} \right)_{,j} = 0 \quad (0.2)$$

La solution à l'équation Eq. (0.2) a été donnée par Green en termes de champ de déplacement et déformation sous la forme [10]:

$$\begin{cases} u_m(r) = U_m^r(r) + \int_V G_{mi}(r-r') \left(\delta c_{ijkl}(r') \varepsilon_{kl}(r') \right)_{,j'} dV' \\ \varepsilon_{mn}(r) = E_{mn}^r(r) - \int_V \Gamma_{mnij}(r-r') \delta c_{ijkl}(r') \varepsilon_{kl}(r') dV' \end{cases} \quad (0.3)$$

Où G représente le tenseur de Green, E^r et U^r sont respectivement le tenseur de déformation et le champ de déplacement liés au milieu de référence, Γ étant le tenseur de Green modifié. Ainsi l'équation intégrale Eq.(0.3), constitue la solution du problème hétérogène. Elle sera utilisée dans les sections suivantes et servira au calcul du tenseur de localisation pour les microstructures étudiées dans ce travail.

3. Modèles micromécaniques et Approche Éléments finis

3.1 Modèle Auto-Cohérent Généralisé de la microstructure multi-enrobée

La topologie de la microstructure multi-enrobée est celle étudiée par Stagni [12]. Elle se compose d'une hétérogénéité circulaire cylindrique vide entourée d'une couche de fibre, suivie d'un enrobage et enfin d'une matrice. L'inclusion composite ainsi constituée est noyée dans le milieu effectif dont les propriétés C^{eff} sont inconnues (Voir FiG. 1-A). En partant de l'équation intégrale Eq.(0.3) et des opérateurs interfaciaux développés par Walpole [17], Lipinski et al. [7] ont montré que le tenseur de localisation en déformation A^k

de la phase k par rapport à la déformation macroscopique est donné par :

$$\begin{cases} A^k = a^k : A^I \\ A^I = \langle A^k \rangle = \sum_{k=1}^N \varphi_k A^k \\ \langle a^k \rangle = \sum_{k=1}^N \varphi_k a^k = I \end{cases} \quad (0.4)$$

Où A^I représente le tenseur de localisation en déformation de l'inclusion composite I et donné par :

$$A^I = \left[I + T^{II} (C^{eff}) : \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \Delta c^k : a^k \right) \right] \quad (0.5)$$

Où a^k représente le tenseur de localisation en déformation de la couche k par rapport à l'inclusion composite I et T^{II} le tenseur d'interaction (Cf. [7, 10] pour les détails de calcul). Les paramètres de conception sont définis d'après [12] : l'épaisseur de l'enrobage $k = (r_2 - r_1) / r_1$, la fraction volumique de l'inclusion composite $f_I = r_2^2 / r_3^2$, les rapports de module de cisaillement $\Gamma_m = \mu_1 / \mu_3$, $\Gamma_c = \mu_1 / \mu_2$

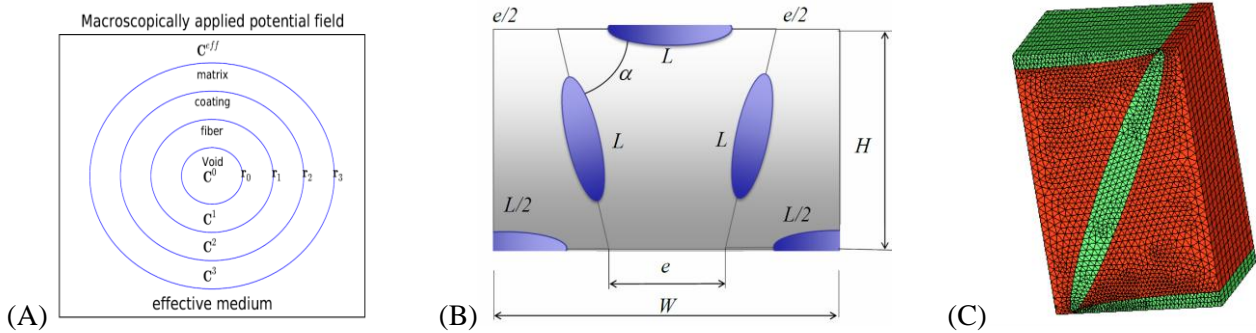


FIG. 1 – Topologies des microstructures étudiées

3.2 Modèle Mori-Tanaka de la « re-entrant microstructure »

La topologie « re-entrant microstructure » se compose d'hétérogénéités ellipsoïdales de dimensions (a,b,c) disposées suivant une texture topographique et noyées dans une matrice infinie (Voir FiG. 1-B). En partant de l'équation intégrale Eq.(0.3), et en utilisant la procédure itérative proposée par Vieville et al. [10], le tenseur de localisation en déformation de la phase I par rapport à la déformation du milieu de référence est donné par l'expression (0.6), où T^{II} et T^{IJ} représentent respectivement les tenseurs d'interaction dans la version mono-site et multi-site. Une approximation numérique basée sur la transformée inverse de Fourier développée par Fassi-Fehri et al. dans [18] permet le calcul des tenseurs d'interaction et de ce fait la prise en compte de l'anisotropie.

$$\begin{cases} (a^I)_0 = I \\ (a^I)_{i+1} = \left[I + T^{II}(C^r) : \Delta c^I \right]^{-1} : \left[I - \sum_{\substack{J=0 \\ J \neq I}}^N T^{II}(C^r) : \Delta c^J : (a^J)_i \right] \end{cases} \quad (0.6)$$

Dans le cas de l'approximation de Mori-Tanaka, le milieu de référence C^r est considéré comme étant la matrice c^0 . Les propriétés effectives s'obtiennent par [10] :

$$\begin{cases} C^{MT} = \left(\varphi_0 c^0 + \sum_{I=1}^N \varphi_I c^I a^I \right) : A^0 \\ A^0 = \left(\varphi_0 I + \sum_{I=1}^N \varphi_I a^I \right)^{-1} \end{cases} \quad (0.7)$$

La fraction maximale d'inclusions qu'on peut simuler avec cette approche est donnée par

$$\varphi_{max} = \frac{\pi C_b}{(1+r)\sqrt{3+2r-r^2}} \text{ où } C_b = \frac{b}{a} \text{ et } r = \frac{e}{L}$$

4. Approche Éléments finis de la « re-entrant microstructure »

Cette approche a été mise en œuvre pour vérifier les résultats obtenus par la méthode micromécanique. Elle consiste à modéliser la matrice du VER dans laquelle sont noyées des hétérogénéités ellipsoïdales (Voir FiG. 1-C). Compte tenue de la symétrie du problème, seul le quart du VER est représenté. Des conditions aux limites symétriques y sont appliquées dans les trois directions, auxquelles s'ajoutent deux conditions de périodicité sur les faces restantes. Le modèle a été ensuite maillé en utilisant le logiciel HyperMesh 10 (Altair, Troy, Michigan, États-Unis) et les calculs ont été performés par le logiciel MSC/MARC 2005 package (MSC Software, Santa Ana, Californie, USA).

5. Quelques résultats

Les implémentations numériques dans les divers cas de microstructure indiquent que le comportement auxétique ne peut être obtenu par les outils micromécaniques développés ci-hauts. En effet, en considérant

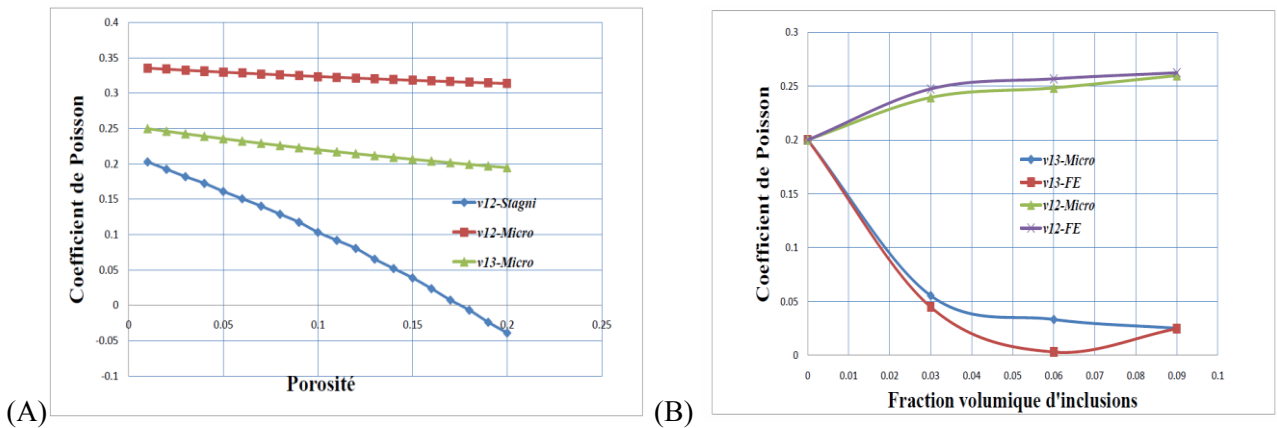


FIG. 2 – Evolution des coefficients de Poisson effectifs :A. microstructure multi-enrobée, B. « re-entrant microstructure »

pour la microstructure multi-enrobée les données de [12], $k = 0.025$, $f_I = 0.7$, $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$, $\Gamma_m = 0.5$, $\Gamma_c = 0.1$, les résultats de la FIG. 2-A montrent des valeurs de coefficient de Poisson décroissantes avec la porosité mais positives, contrairement aux résultats obtenus par Stagni [12]. En ce qui concerne la microstructure nid d'abeille non conventionnelle dite « re-entrant », les valeurs micromécaniques de coefficient de Poisson obtenues restent positives et en bon accord avec les résultats issus de la modélisation Eléments Finis FIG. 2-B pour des rapports de propriétés $\frac{E_{incl}}{E_{mat}} = 100$, $\nu_{incl} = 0.05$, $\nu_{mat} = 0.2$.

En outre, en considérant la continuité de matière entre les hétérogénéités à travers des inclusions interconnectées, les résultats de la FIG. 3-A montrent un comportement auxétique du VER quand ce dernier est soumis à une déformation de 5% en traction. Le graphe de la FIG. 3-B confirme ce comportement pour la valeur du coefficient de Poisson ν_{12} .

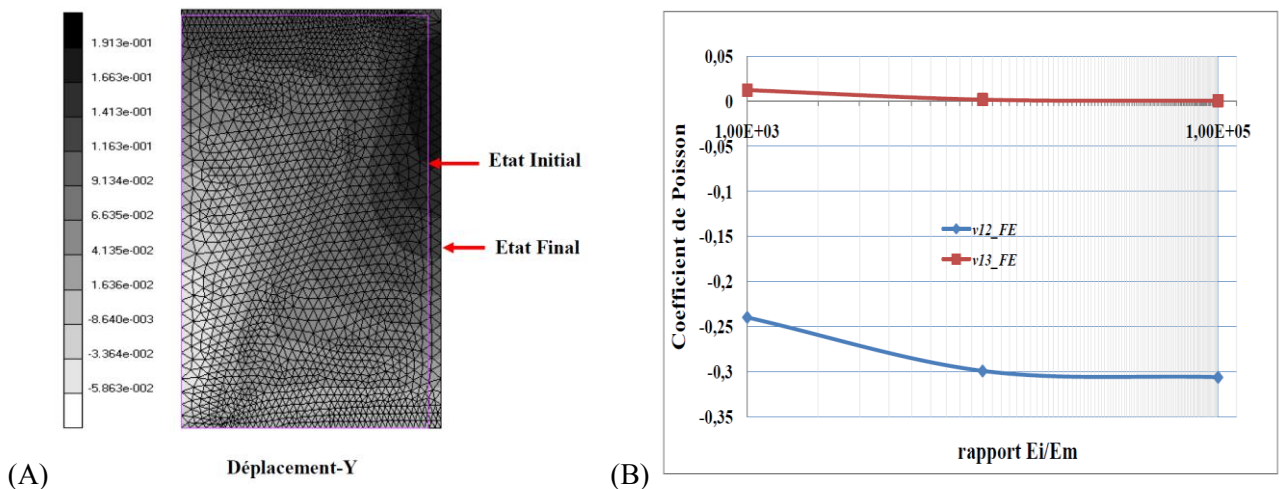


FIG. 3 – Inclusions interconnectées, Résultats EF : (A) Déplacement-Y, (B) Evolution du Coef. de Poisson en fonction du rapport $\frac{E_{incl}}{E_{mat}}$

6. Conclusion

De cette étude, il en ressort que les microstructures explorées ne conduisent pas au comportement auxétique. En effet, la prise en compte de l'interaction des inclusions au niveau de la microstructure « re-entrant » n'a pas un effet significatif dans la description du comportement auxétique. Le modèle multi-enrobé quant à lui, présente des valeurs de coefficient de Poisson en opposition à celles obtenues dans [12]. Enfin, les résultats Eléments Finis montrent que le comportement auxétique ne peut être décrit que par des hétérogénéités présentant une continuité de matière entre elles.

Remerciements

Ce projet est supporté financièrement par le Fonds National de la Recherche, Luxembourg (PHD-09-015-RE).

Références

- [1] Wei Yang, Zhong-Ming Li, Wei Shi, Bang-Hu Xie, and Ming-Bo Yang. Review on auxetic materials. *Journal of Materials Science*, 39(10):3269–3279, May 2004.
- [2] R. S. Lakes. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 235:1038–1040, 1987.
- [3] G. E. Stavroulakis. Auxetic behaviour: appearance and engineering applications. *physica status solidi (b)*, 242(3):710–720, 2005.

- [4] K. E. Evans and A. Alderson. Auxetic materials: Functional materials and structures from lateral thinking! *Advanced Materials*, 12(9):617–628, 2000.
- [5] N. Gaspar, X.J. Ren, C.W. Smith, J.N. Grima, and K.E. Evans. Novel honeycombs with auxetic behaviour. *Acta Materialia*, 53(8):2439 – 2445, 2005.
- [6] N. Gaspar, C.W. Smith, and K.E. Evans. Auxetic behaviour and anisotropic heterogeneity. *Acta Materialia*, 57(3):875 – 880, 2009.
- [7] P. Lipinski, E.H. Barhdadi, and M. Cherkaoui. Micromechanical modeling of an arbitrary ellipsoidal multi-coated inclusion. *Philosophical Magazine*, 86(10):1305–1326, 2006.
- [8] Yao Koutsawa, Fabio Biscani, Salim Belouettar, Houssein Nasser, and Erasmo Carrera. Multi-coating inhomogeneities approach for the effective thermo-electro-elastic properties of piezoelectric composite materials. *Composite Structures*, 92(4):964 – 972, 2010.
- [9] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4):315 – 330, 1979.
- [10] P. Vieville, A. S. Bonnet, and P. Lipinski. Modelling effective properties of composite materials using the inclusion concept. general considerations. *Arch. Mech.*, 58(3):207–239, 2006.
- [11] P. H. Dederichs and R. Zeller. Variational treatment of the elastic constants of disordered materials. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Volume 259, Number 2, 103-116, DOI: 10.1007/BF01392841, 1973.
- [12] L. Stagni. Effective transverse elastic moduli of a composite reinforced with multilayered hollow-cored fibers. *Composites Science and Technology*, 61(12):1729 – 1734, 2001.
- [13] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213 – 222, 1965.
- [14] E. Kröner. Effective moduli of random elastic media-unified calculation of bounds and self-consistent values. *Mechanics Research Communications*, 4(6):389 – 393, 1977.
- [15] E. Kröner. Bounds for effective elastic moduli of disordered materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25(2):137 – 155, 1977.
- [16] J.R. Willis. Variational and related methods for the overall properties of composites. volume 21 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 1 – 78. Elsevier, 1981.
- [17] L.J. Walpole. Elastic behavior of composite materials: Theoretical foundations. volume 21 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 169 – 242. Elsevier, 1981.
- [18] O. Fassi-Fehri, A. Hihi, and M. Berveiller. Multiple site self consistent scheme. *International Journal of Engineering Science*, 27(5):495 – 502, 1989.